

Le frazioni a scuola

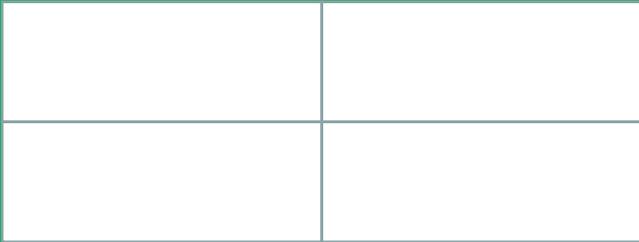
ovvero

storia di una torta ..indigesta

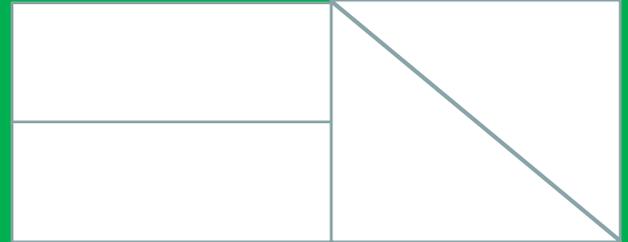
**Cos'è per te una frazione ?**

**Cosa significa frazionare?**

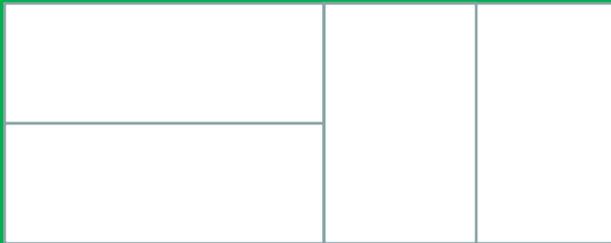
a



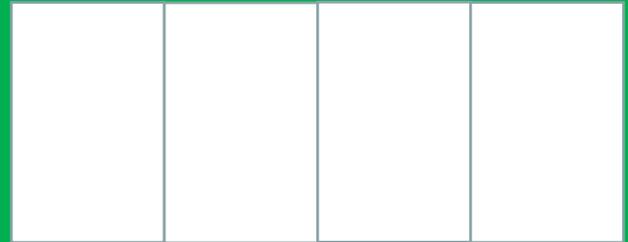
e



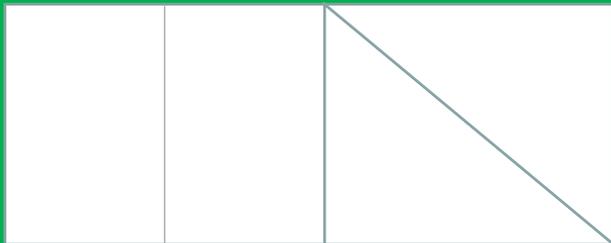
b



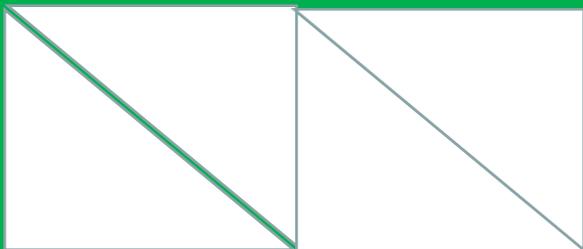
f



c



d



In quale caso  
posso parlare di  
frazione

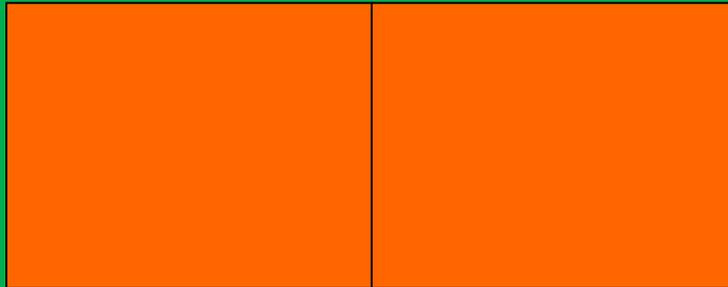
Uguale in cosa?



# PRIMO OSTACOLO



**Parti uguali**

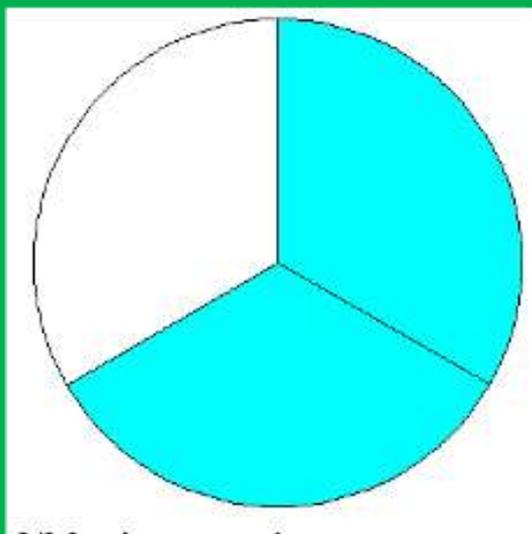


# Misconcetti e difficoltà

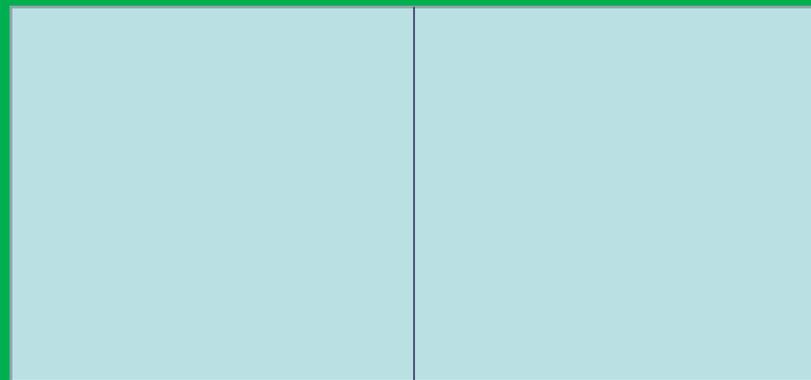
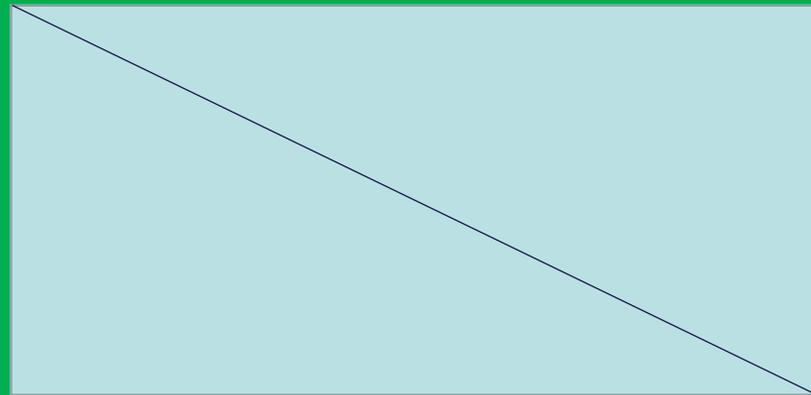
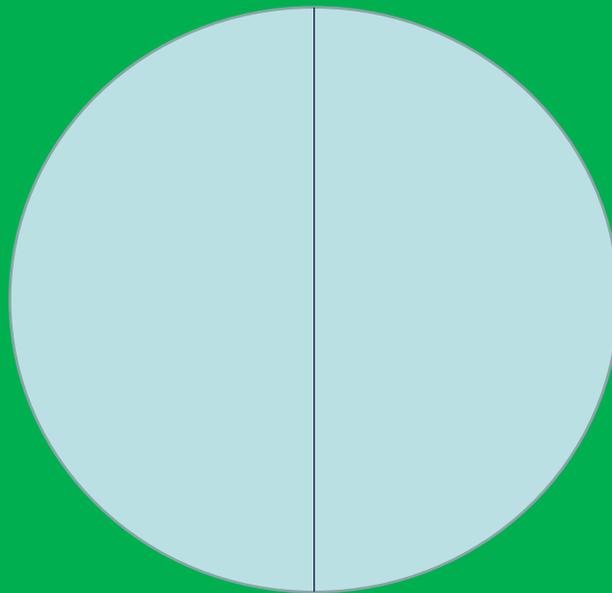
Frazione come divisione in parti uguali

**UGUALI** ....in cosa?

Si fissa il misconcetto di cercare divisioni geometriche di figure congruenti mentre l'uguale non è inteso come forma ma come quantità



**Non solo  
TORTE  
«TONDE»**



*Anna e Silvia hanno ricevuto in regalo 12 caramelle e decidono di prenderne metà ciascuno. Quante caramelle prende Anna? Quante caramelle prende Silvia?*

**DISCRETO**



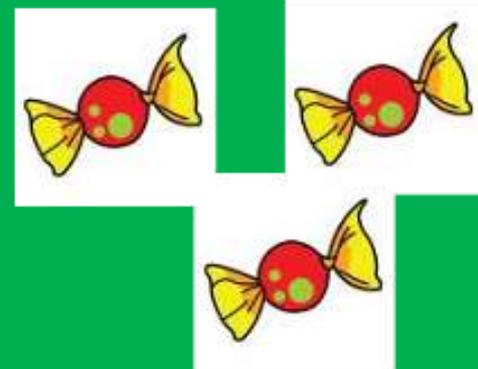
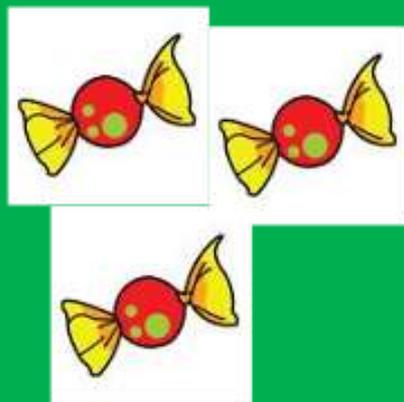
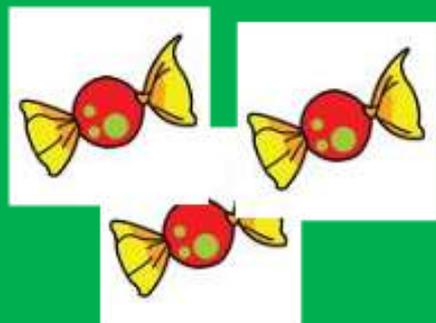
*Giulia ha portato a scuola la bottiglia d'acqua, ma ne rovescia la metà. Quanta acqua rimane nella bottiglia?*

**CONTINUO**



## Discreto e continuo

Fare 3 mucchietti di caramelle o dividere in tre un foglio è diverso per un bambino

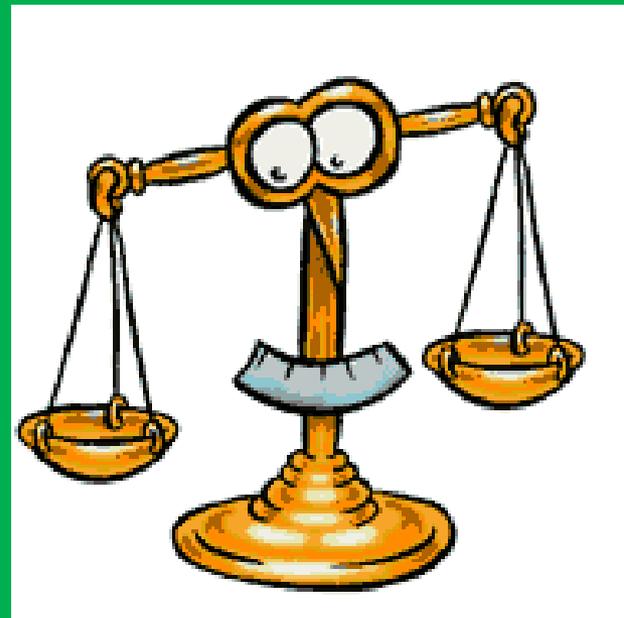
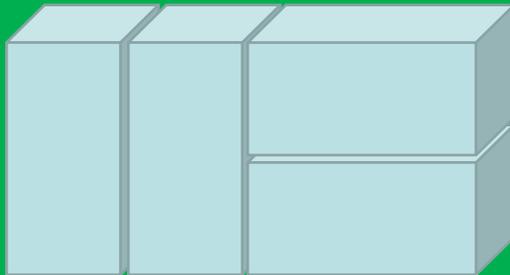




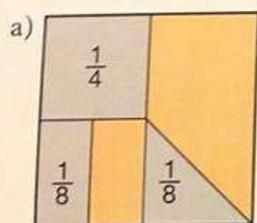
**Come fare?**



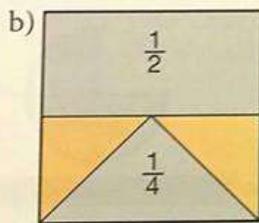
Riempire scatole con i ceci



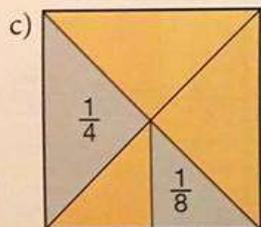
3 Completa.



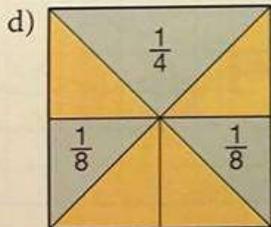
=



=

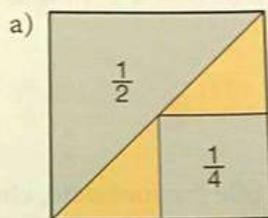


=

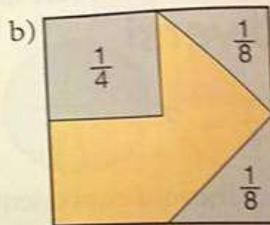


=

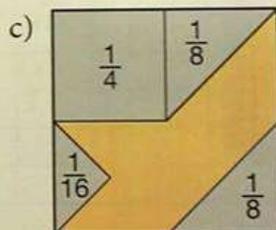
4 Completa.



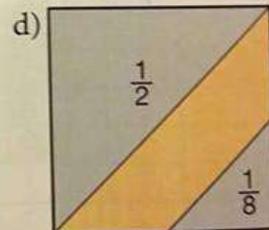
=



=



=



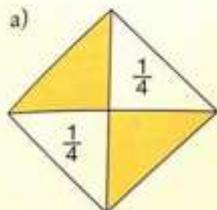
=

5 Completa.

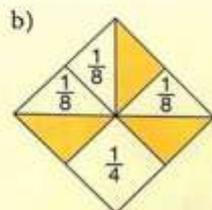
$\frac{3}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = \frac{6}{8} + \frac{3}{8} - \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$

le frazioni allo **stesso denominatore**. **con denominatori diversi**, devi ridurre  
 poi devi sommare o sottrarre i numeratori e mantenere il denominatore comune.

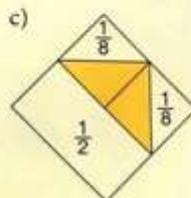
**1** Completa.



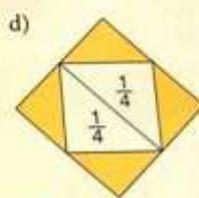
=  $\frac{1}{2}$



=

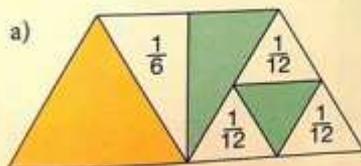


=

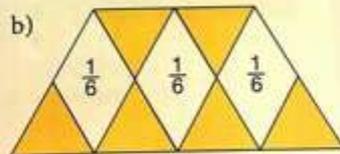


=

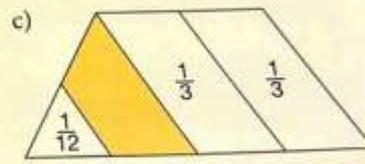
**2** Completa.



=



=



=

# Frazione come parte / tutto

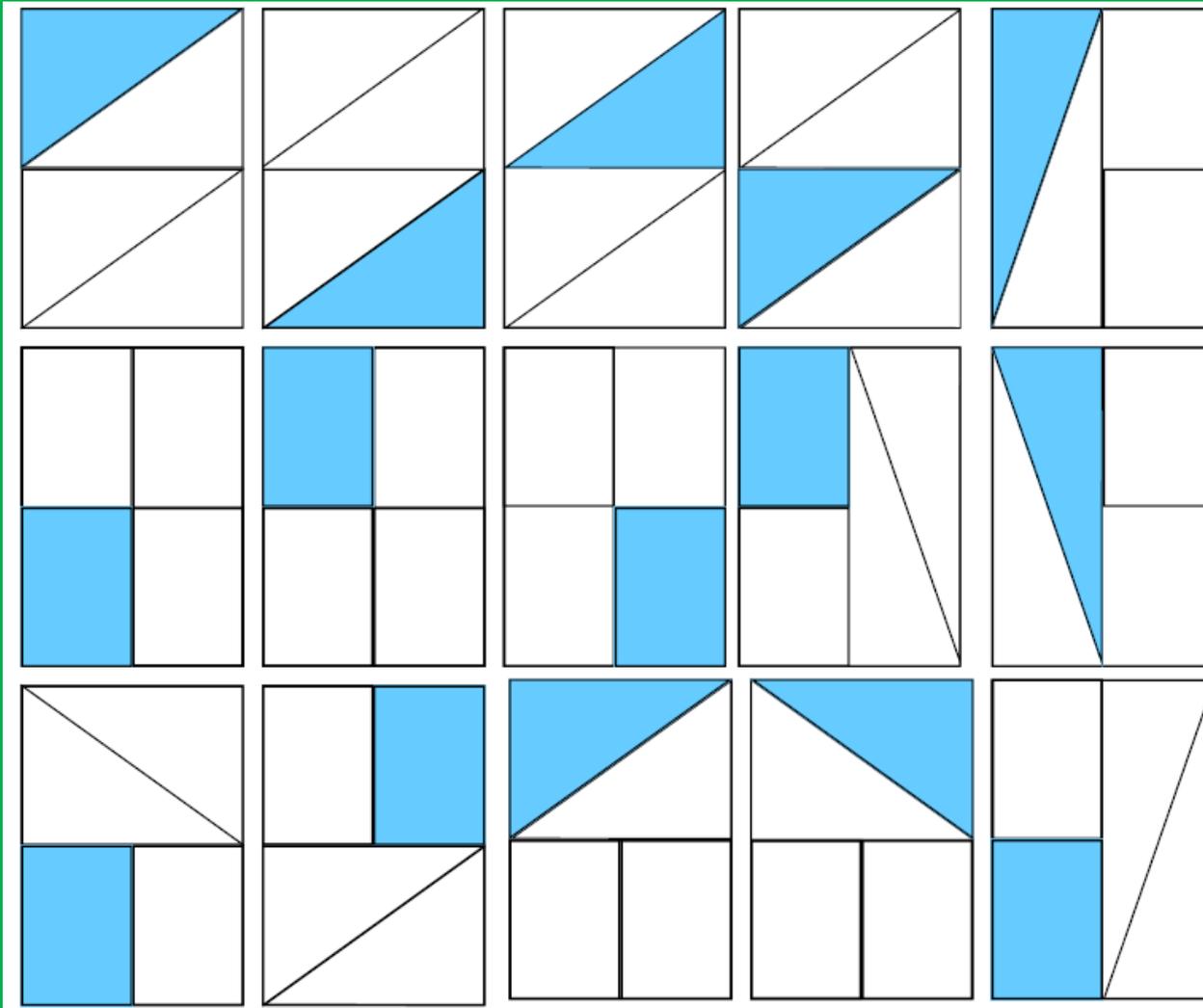
*Divido per il sotto e moltiplico per il sopra*



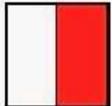
Perché?

# Attività

- 1. Giochiamo con le carte** (quali? Perché alcune sì altre no? )
- 2. Giochiamo a domino** (con quali registri?)
- 3. Facciamo le tovagliette** (per parlare anche di ....)
- 4. La girandola origami o pesce fratto**
- 5. Il problema dei pani egiziano**
- 6. Il pane a Bagdad** (fiaba dei pani)
- 7. I problemi del rally**
- 8. Il quadrato «triangolato»**
- 9. Puzzle di frazioni**
- 10. Spalmare aree**

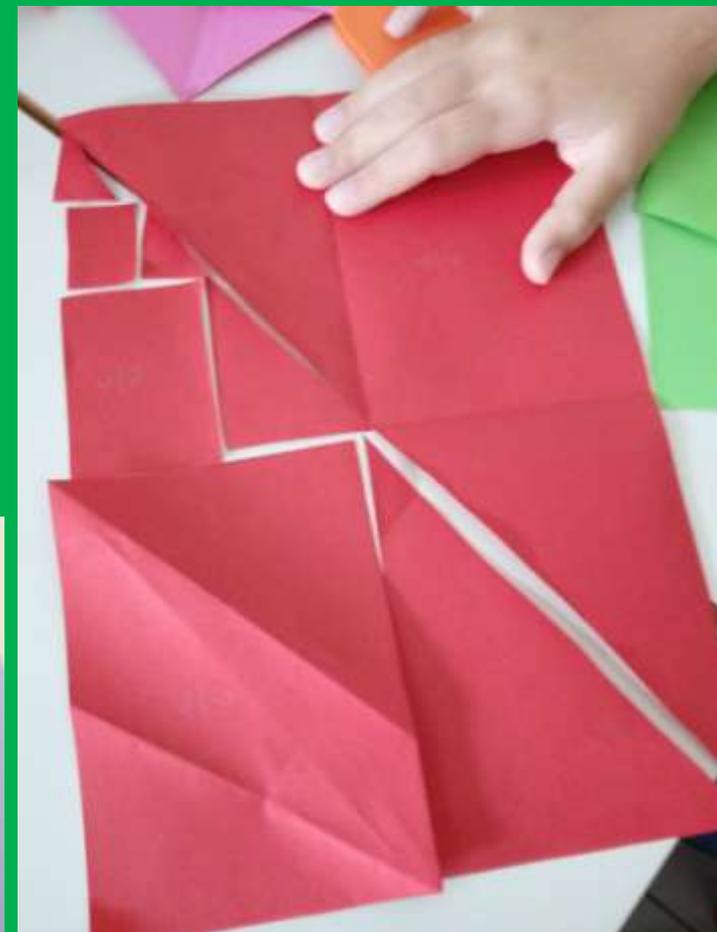


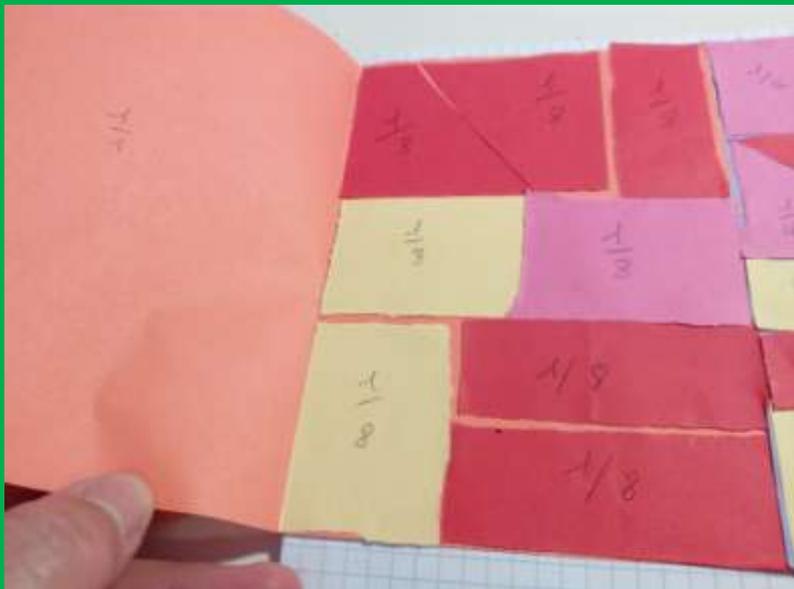
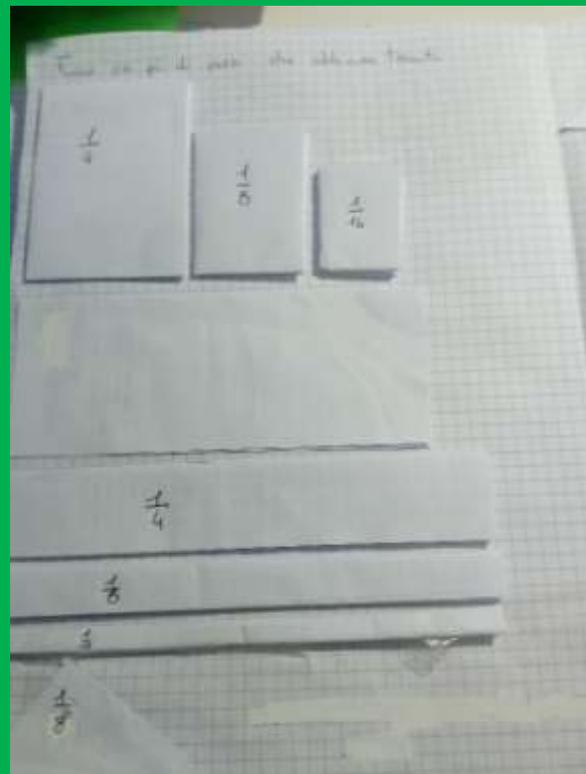
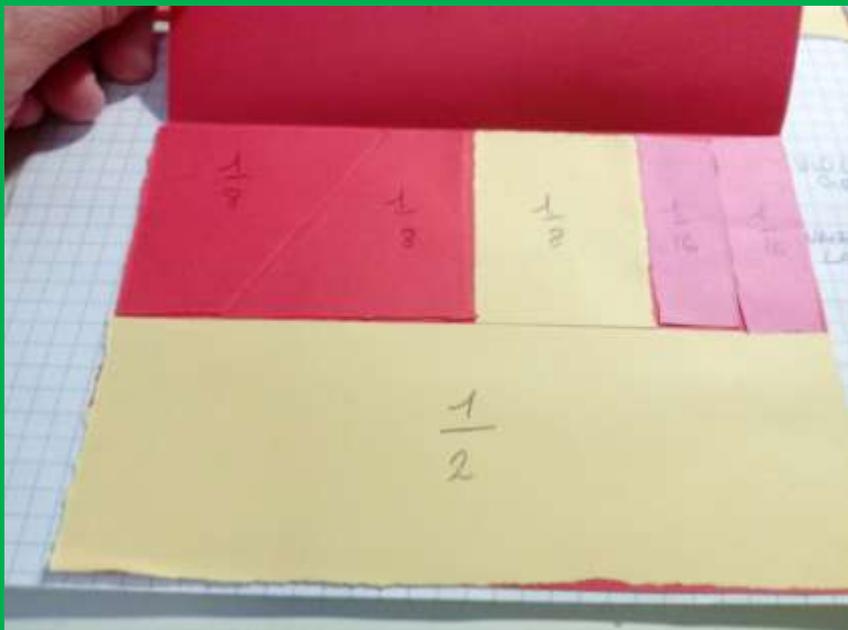
Che frazione? Detta come? Quanto manca per avere un intero? E due? ecc ecc ecc

una metà		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	un quinto

# Tovagliette

da frazioni sul filo







## PROBLEMA EGIZIANO

Ci sono 4 PANI DA DIVIDERE IN 5 PERSONE, IN MODO CHE TUTTI ABBIANO LA STESSA PARTE.



$40 : 5 = 8$  pezzi di pane per persona.

Ogni pane si divide in 10 pezzi. Si sommano i pezzi e il tutto si divide per 5.

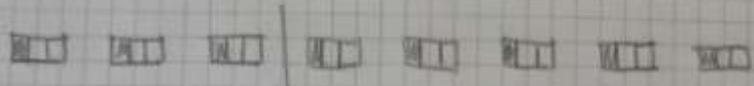
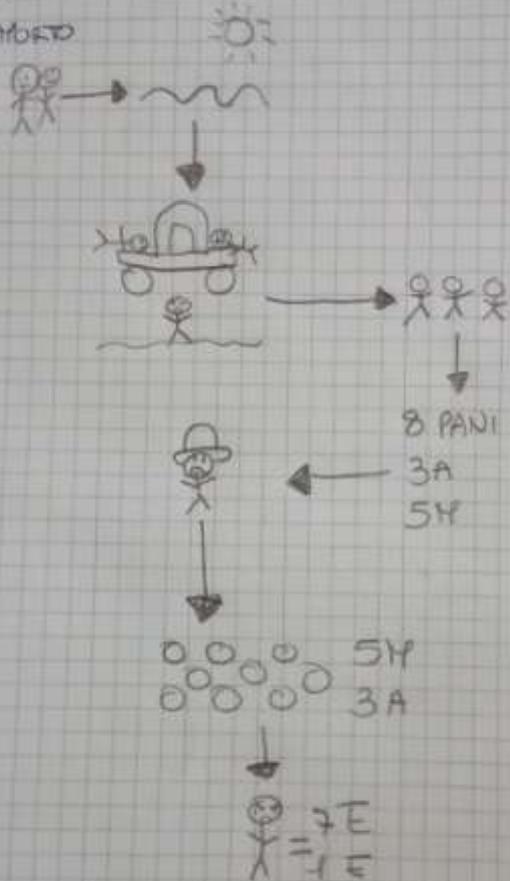
-  pezzi per il 1° BAMBINO
-  pezzi per il 2° BAMBINO
-  pezzi per il 3° BAMBINO
-  pezzi per il 4° BAMBINO
-  pezzi per il 5° BAMBINO

# LA FIABA DEI PANI

$$3P = 3E$$

$$5P = 5E$$

L'HEZZO MORTO



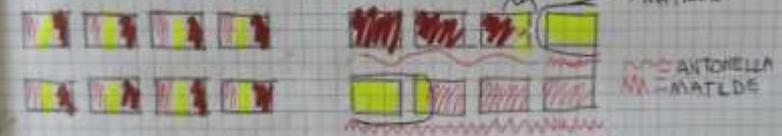
MATILDE = 7 PEZZI A L  
ANTONELLA = 1 PEZZO A L

6+ 6+ 6+ 6+ 6+ 6+

# LA FIABA DEI PANI

$$3 = \text{PAGNOTTE} / 3 = \text{SOLDI} / 7 = \text{SOLDI}$$

$$5 = \text{PAGNOTTE} / 5 = \text{SOLDI} / 7 = \text{SOLDI}$$

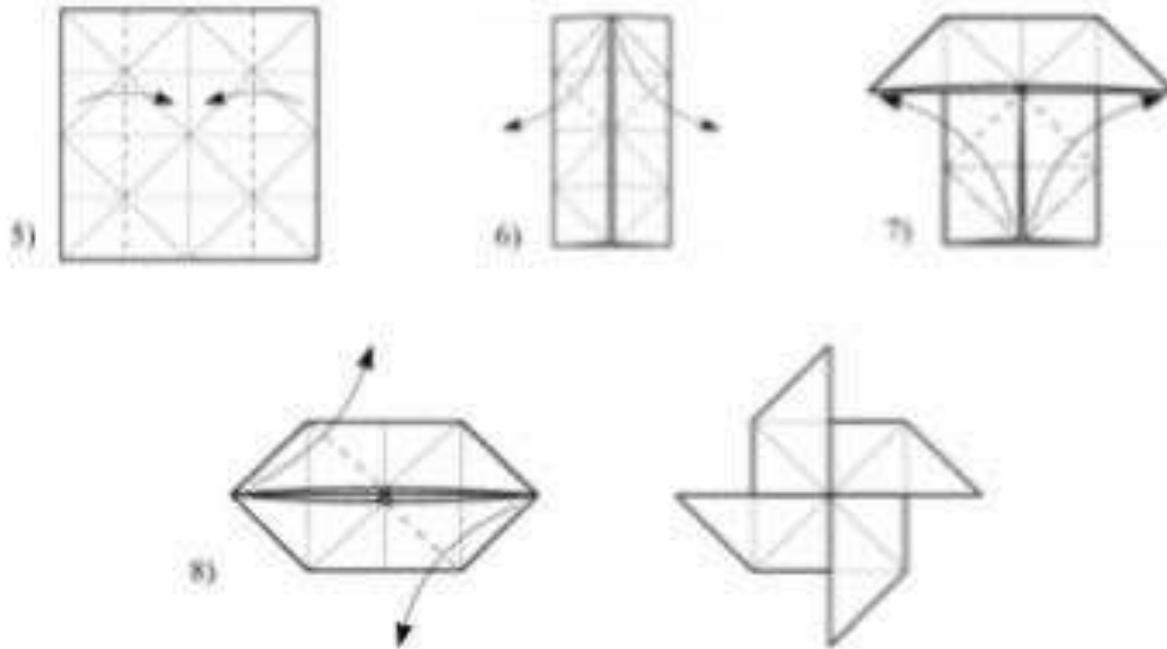


$$\frac{48}{6} = 8 \text{ PANI (INTERO)}$$

$$\frac{24}{6} = 4 \text{ PETTE (INTERO)}$$

LUDDI ANTONELLA  
LUDDI MATILDE

QUINDI MATILDE VOLEVA GIUSTAMENTE 2 SOLDI INVECE DI 5 E ANTONELLA DOVREBBE AVERE 1 NON 3



La girandola

“non avete per caso qualcosa da mangiare? Sto morendo di fame.”

“ho tre pagnotte” risposi.

“Io ne ho cinque” disse il mio amico Beremiz.

“Allora” fece lo Sceicco, “vi scongiuro di dividere le vostre pagnotte con me. Vi propongo uno scambio ragionevole. Vi darò per il pane otto monete d'oro, non appena giungerò a Baghdad”. E così dividemmo tra noi le pagnotte.

.....

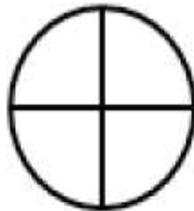
“A questo punto Salem Nasair ci disse: “Prendo congedo da voi, amici miei, e vi ringrazio ancora una volta, prima di compensarvi come promesso.” E rivolgendosi a Beremiz: “ecco cinque monete d'oro per i tuoi cinque pani”. Poi a me: “e tre a te, mio amico di Baghdad, per le tue tre pagnotte”.

Fu allora che, con mia grande sorpresa, il mio amico Beremiz sollevò rispettosamente un'obiezione: “perdonami, Sceicco! Ma questa suddivisione, che pure sembra semplice, non è matematicamente giusta. Dal momento che ho dato cinque pagnotte, devo ricevere sette monete. Il mio amico, che ha ceduto tre pagnotte, deve riceverne soltanto una.”

## 10. FETTE DI TORTA (Cat. 6, 7, 8)

Otto amici hanno ordinato sei torte per la merenda. Il pasticciere ha consegnato due torte alle fragole, due torte alle mele e due ai kiwi. Tutte le torte sono della stessa dimensione, ma le torte alle fragole sono già divise in quattro parti uguali, le torte alle mele sono divise in sei parti uguali e quelle ai kiwi sono divise in otto parti uguali.

Gli otto amici si mettono d'accordo affinché ognuno mangi la stessa quantità di torta, senza dover tagliare altre fette. Ognuno di essi vuole inoltre mangiare due tipi di torta diversi. Siccome sono molto golosi, non rimane nemmeno una fetta di torta.



torte alle fragole

torte alle mele

torte ai kiwi

**Come possono essersi suddivisi le fette di torta gli otto amici?**

**Indicate tutte le possibilità che avete ottenuto e spiegate il vostro ragionamento.**

Il ragionamento più semplice consiste nel cercare di completare una o più parti di ogni torta per ottenere delle porzioni di  $\frac{6}{8}$  (o di  $\frac{3}{4}$ ) di torta.

- Completare  $\frac{1}{4}$  (uguale a  $\frac{2}{8}$ ) con  $\frac{4}{8}$  (o  $\frac{1}{2}$ ). Si può avere allora:  $\frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{6}$  o  $\frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8}$ .
- Completare  $2 \times \frac{1}{4}$  (uguale a  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{4}{8}$ ) con  $2 \times \frac{1}{8}$ . Quindi  $2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8}$ .
- Completare  $\frac{1}{6}$  o  $\frac{2}{6}$  con degli ottavi per avere  $\frac{6}{8}$  non è possibile.
- Completare  $\frac{3}{6}$  (uguale a  $\frac{1}{2}$ ) con degli ottavi è possibile:  $3 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{8}$ .

Si possono quindi ottenere  $\frac{6}{8}$  di torta in quattro modi diversi, tenendo conto che ogni amico prende solo due tipi di torta:

	Torta alle fragole	Torta alle mele	Torte ai kiwi
Porzione A	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$	
Porzione B	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$
Porzione C	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$		$\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$
Porzione D		$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

- Le 5 ripartizioni possibili tra gli 8 amici derivano dalle combinazioni di queste 4 porzioni:
  - ripartizione 1: 4 persone con A; 4 persone con B
  - ripartizione 2: 3 persone con A; 3 persone con B; 1 persona con C; 1 persona con D
  - ripartizione 3: 2 persone con C; 2 persone con B; 2 persone con A; 2 persone con D
  - ripartizione 4: 1 persona con A; 1 persona con B; 3 persone con C; 3 persone con D
  - ripartizione 5: 4 persone con C; 4 persone con D

Oppure

- Procedere per tentativi più o meno organizzati, a partire dal taglio di tutte le fette di torte. Questa strategia può permettere di trovare una o due ripartizioni, ma probabilmente non tutte le cinque possibili.

**Soluzione**

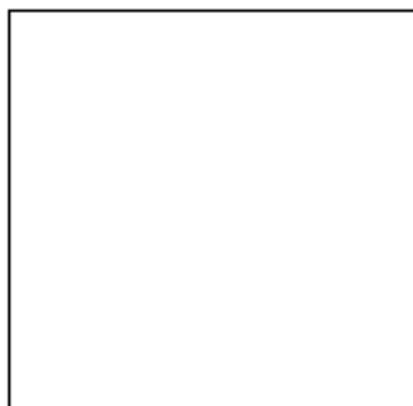
Almeno tre ripartizioni esatte, con spiegazioni corrette e senza ripartizioni sbagliate

## 1. LA TORTA QUADRATA (Cat. 3, 4) ©ARMT 2014 - 22° - finale

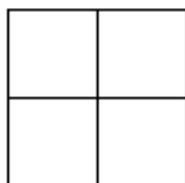
Quattro bambini si ritrovano per mangiare una torta quadrata.

- Ogni bambino vuole chiaramente avere la stessa quantità di torta degli altri;
- due bambini vogliono una fetta di torta di forma quadrata;
- gli altri due bambini vogliono una fetta di torta di forma triangolare.

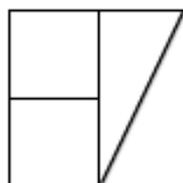
**Disegnate, su questo quadrato, una suddivisione che possa soddisfare ogni bambino:**



- Capire i vincoli del problema: dividere il quadrato in quattro parti, due quadrati e due triangoli, di area uguale.
- Strategia per tentativi di quadrati ritagliati, poi di triangoli (probabilmente rettangoli).
- Strategia deduttiva:
  - dedurre dai dati che ogni parte quadrata rappresenta  $1/4$  del quadrato iniziale;
  - capire che per dividere il quadrato iniziale in 4 parti quadrate identiche, bisogna dividere il lato del quadrato in 2 segmenti della stessa lunghezza; (*figura 1*)
  - capire che bisogna tenere 2 di questi quadrati e trasformare lo spazio occupato dagli altri 2 quadrati in 2 triangoli;
  - capire che 2 quadrati adiacenti possono essere divisi in 2 triangoli rettangoli identici (quindi della stessa area di ogni quadrato): la spiegazione non è richiesta (ma un controllo tramite ritaglio e sovrapposizione è possibile), poi fare i disegni corrispondenti (vedi esempio *figura 2*).



*figura 1*



*figura 2*

- Capire che ogni bambino deve avere l'equivalente di un quadrato. Dividere un quadrato in due semi-quadrati e cercare, come è possibile, di ottenere un triangolo mettendo insieme due semi-quadrati (assemblaggio lungo un lato dell'angolo retto). Si ottiene un triangolo rettangolo isoscele che ha per lato dell'angolo retto una diagonale di un quadrato.

Cercare in seguito, come è possibile, sistemare 2 di questi triangoli in un quadrato  $2 \times 2$

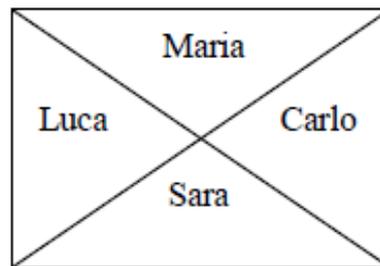
#### Soluzione

Soluzione corretta con disegno preciso e completo

## 6. LA TORTA DI NONNA LUCIA (Cat. 4, 5, 6)

Nonna Lucia ha preparato una torta rettangolare al cioccolato per la merenda dei suoi nipoti Luca, Carlo, Sara e Maria.

Per darne una fetta ciascuno la divide in questo modo:



Luca e Carlo non sono contenti perché pensano che Sara e Maria abbiano i due pezzi più grandi. Sara e Maria sostengono invece che ognuno ha ricevuto la stessa quantità di torta.

**Chi ha ragione?**

**Mostrate come avete trovato la vostra risposta.**

<https://blogscuol4.wordpress.com/2016/02/02/la-torta-della-nonna-lucia/#jp-carousel-1126>

Lunedì 01-02-16

### La torta di nonna Lucia

Nonna Lucia ha preparato una torta rettangolare al cioccolato per la merenda dei suoi nipoti Luca, Carlo, Sara e Maria. Per dare una fetta ciascuno la divide in questo modo:



Luca e Carlo non sono contenti perché pensano che Sara e Maria abbiano i 2 pezzi più grandi.

Sara e Maria sostengono invece che ognuno ha ricevuto la stessa quantità di torta. CHI HA RAGIONE?

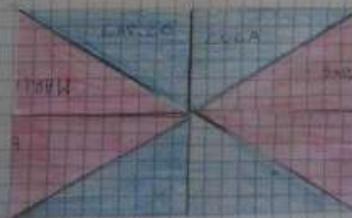
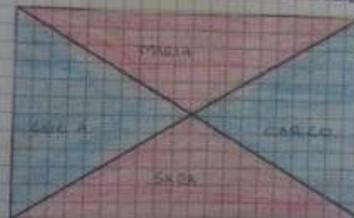
Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

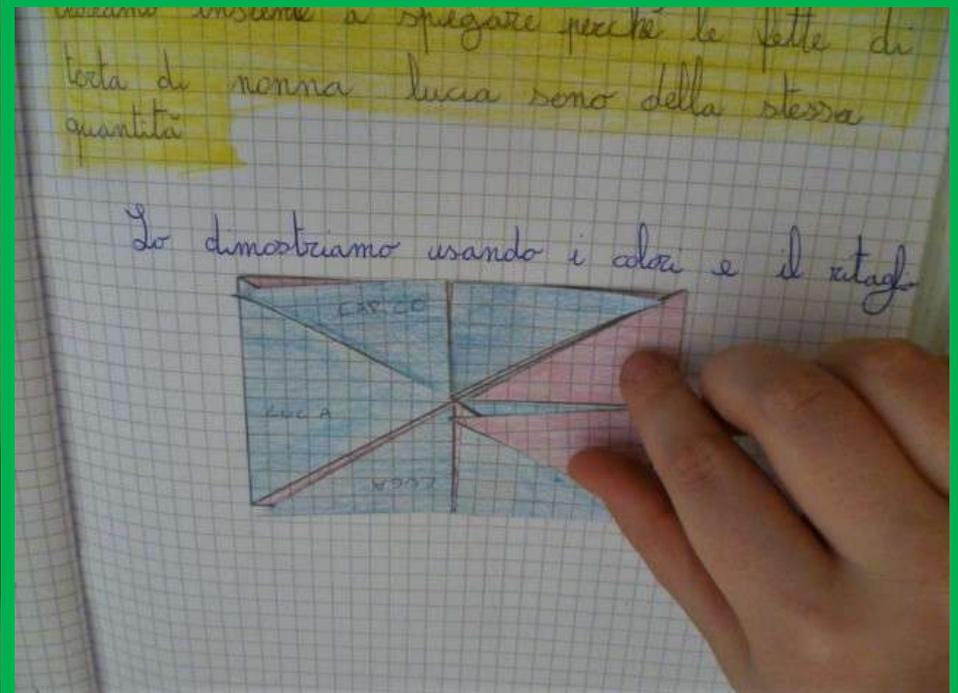
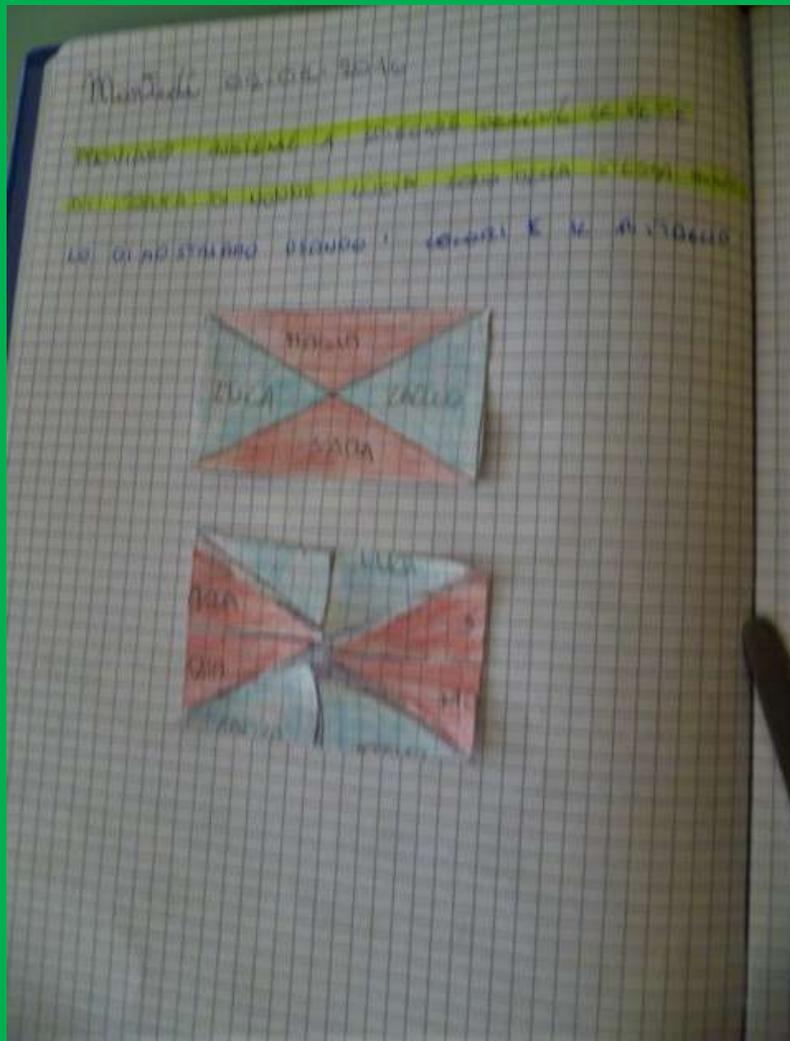
Il giorno seguente Sara e Maria perché se tagli a metà la fetta di Luca o Carlo e la sovrapponi a quella di Sara o Maria scopri che sono uguali.

Martedì 02-02-2016

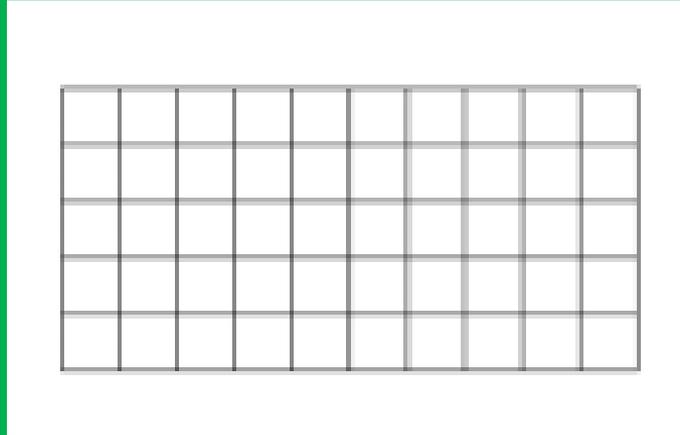
Proviamo insieme a spiegare perché le fette di torta di nonna Lucia sono della stessa quantità.

Lo dimostreremo usando i dischi e il ritaglio.





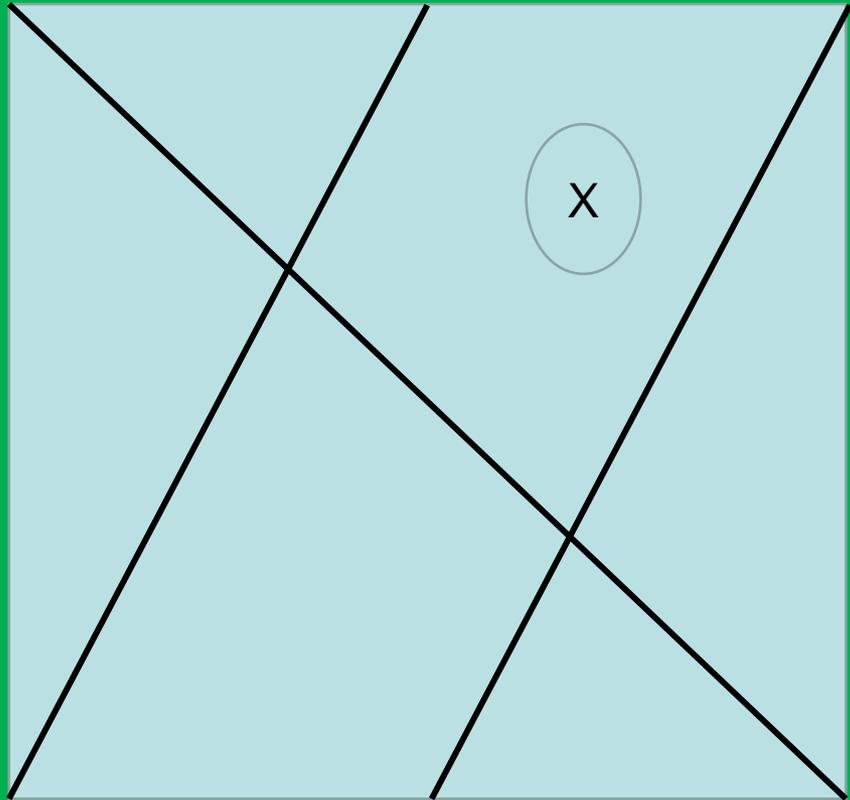
<https://blogscuol4.wordpress.com/2016/02/02/la-torta-della-nonna-lucia/>



Il monte-premi di una lotteria è di 50.000 €; il primo premio è di 25.000 €, il secondo di 10.000 €, il terzo di 5.000 €, il quarto di 4.000 €, il quinto e il sesto premio sono uguali.

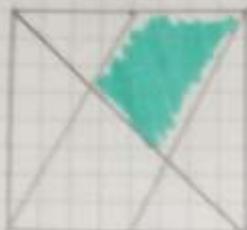
Nella figura un quadretto rappresenta 1.000 €

1. Colora con colori diversi i quadretti quanti servono per rappresentare i sei premi, un colore per ogni premio.
2. Quale parte del monte-premi è stata incassata da chi ha vinto il secondo premio? Esprimi questa parte con una frazione.
3. Marco ha vinto il sesto premio: quanto ha vinto?



20-11-19

### PROBLEMA



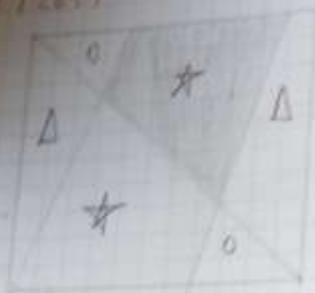
QUE PARTE RAPPRESENTA DEL QUADRATO?  
PERCHÉ?



NEL SECONDO MODO È  
BASTATO DIVIDERE LA  
FIGURA IN 2 PARTI

ABBIAMO PENSATO DI  
DIVIDERE QUESTO  
QUADRATO NEI 2 TRIANGOLI  
(LASCIANDO DA PARTE QUEL  
PARALLELOGRAMMA) E UN  
TRIANGOLO È  $\frac{1}{4}$  DELLA  
FIGURA, PERCIÒ  $\frac{1}{4}$  LA  
FIGURA CENTRALE È  $\frac{1}{2}$ ,  
DIVISA IN 2 PARTI,  $\frac{1}{2}$   
 $\frac{1}{4}$

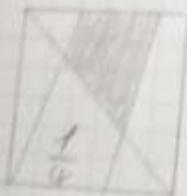
20/11/2017



La parte colorata della figura è  $\frac{1}{2}$  dell'intero perché, anche se, la figura colorata è più grande delle altre.

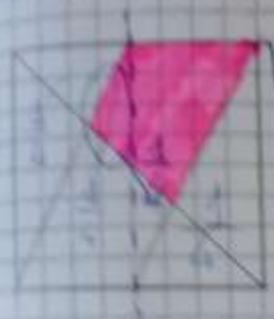


Metodo 1



Per far capire che la parte colorata è  $\frac{1}{4}$  bisogna dividere il quadrato a metà





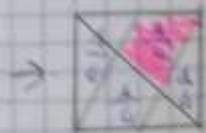
$$\frac{1}{4} = \text{red box}$$

Questa parte è  $\frac{1}{4}$  dell'intero perché se dividiamo l'intero in 4 parti uguali e la parte colorata che esce dalla metà a destra la "spicchio" nella parte bianca sottostante, così l'intero è diviso perfettamente in quarti di cui uno è colorato quindi  $\frac{1}{4}$  dell'intero.



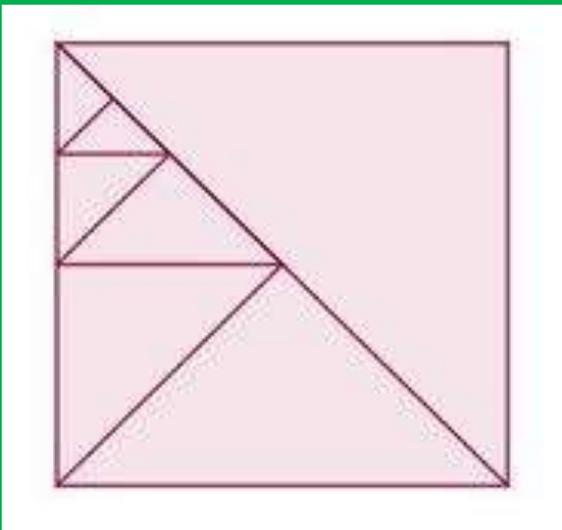
Questo era il modo 1.

Modo 2



Perché si vede che i due triangoli rettangoli interni sono  $\frac{1}{2}$  di conseguenza la parte rimanente è  $\frac{1}{2}$ . Se considero che la parte colorata è delimitata dalla diagonale, che divide la parte in 2 parti perfettamente uguali, allora capisco che è  $\frac{1}{4}$  perché è la metà della metà.

$$\frac{1}{4}$$

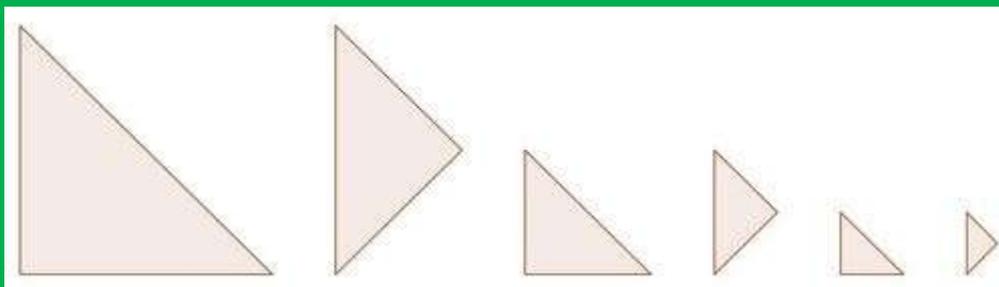


Quale frazione del quadrato iniziale rappresentano i diversi triangoli ottenuti ?

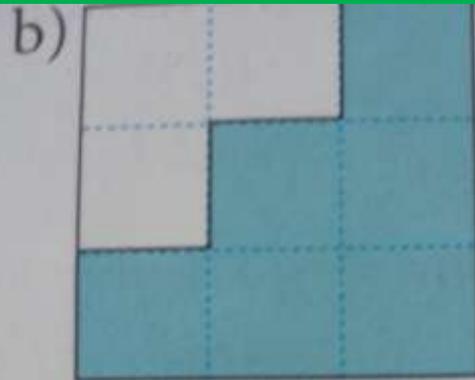
L'area del triangolo che otteniamo alla decima piegatura, quale frazione dell'area del quadrato iniziale è?

E quella della ventesima piegatura?

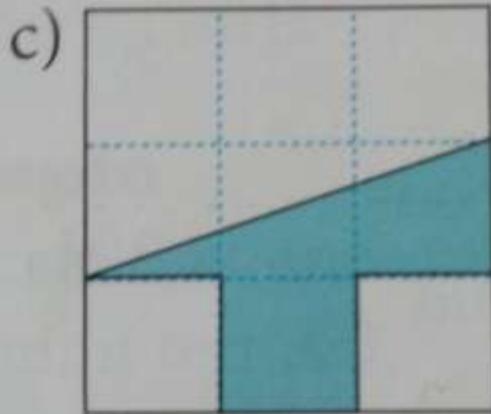
Quando piegare è difficilissimo, la mente fa ciò che la mano non fa



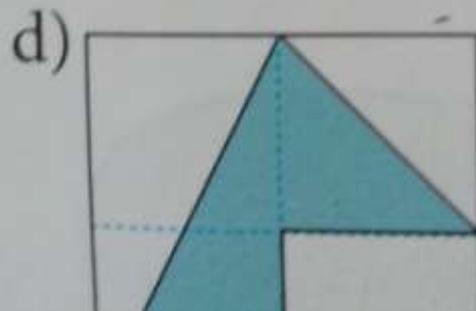




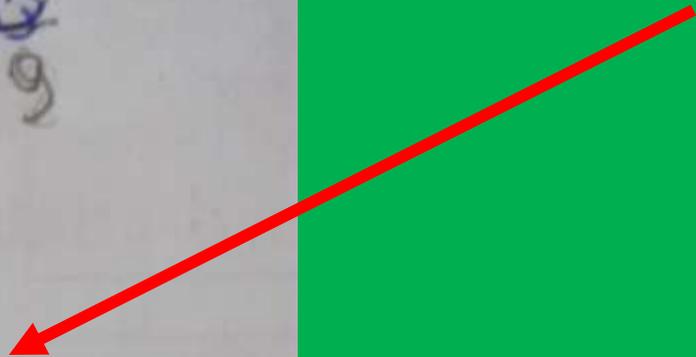
$$\frac{5}{9}$$



$$\frac{2,5}{9}$$



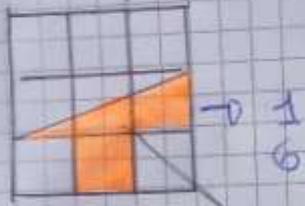
$$\frac{1,5}{4}$$



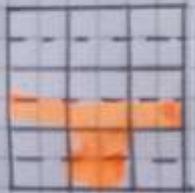
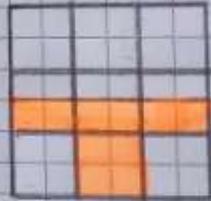
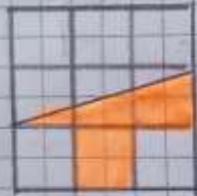
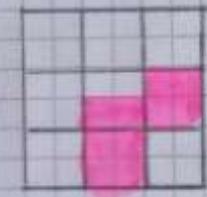
28/9/2017

VICINO IL PIANO

$\frac{6}{12} + \frac{6}{12}$   
 $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$



LA METÀ DI UN QUADRATO



$\frac{5}{18}$





## METTIAMO IN ORDINE

- CONOSCERE I MOLTI ASPETTI DELLA FRAZIONE
- LA FRAZIONE NEL VISSUTO (SCONTI PERCENTUALI  
RICETTE MEDICINE LA LINGUA COMUNE
- IDEARE SITUAZIONI MOTIVANTI E SIGNIFICATIVE
- FARE SPESSO RIFERIMENTO AL GIOCO
- AFFRONTARE LA FRAZIONE NEL SUOI MOLTEPLICI  
ASPETTI E NON A COMPARTIMENTI STAGNI

E ancora ...

buttare le schede prestrutturate

Esaminare criticamente i libri di testo

Usare percorsi già sperimentati e poi ricostruire

Non aver paura a proporre problemi non standard (la banalità non motiva mai)

## Difficoltà di base (epistemologiche)

Parti UGUALI

Parte di un intero

F. Proprie improprie apparenti

Continuo/discreto

Si può sempre frazionare?

## Difficoltà di base (epistemologiche)

Ordinare frazioni

Ordinare decimali

Gestire l'=  
=

Gestire figure non standard

## Difficoltà didattiche

Non si riesce a vedere la frazione  
come numero

Capiure i vari registri semiotici

I cattivi libri di testo avere sempre  
presente l'intero quindi no a torte  
pizze ecc e sì a fogli carta colorati  
da mettere in scatole(frazioni  
equivalenti)



## I vari significati

parte di intero

Quoziente

rapporto

Operatore

Probabilità

Punteggi

Numero razionale

Punto su retta

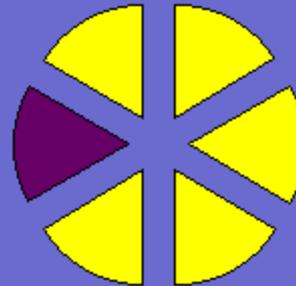
Misura

Percentuale

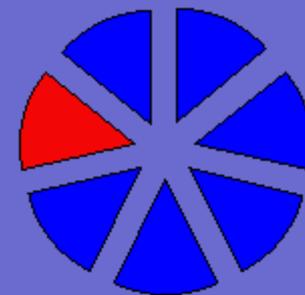
Linguaggio comune

Difficoltà di base (epistemologiche)

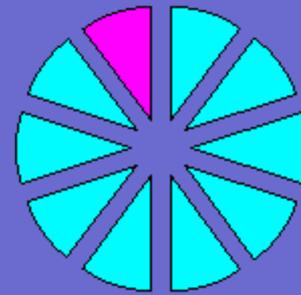
## Altro che torte!



un sesto =  $\frac{1}{6}$



un settimo =  $\frac{1}{7}$



un decimo =  $\frac{1}{10}$

